SIMULACIÓN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS Y DE LA NEGACIÓN DEL V POSTULADO DE EUCLIDES UTILIZANDO SOFTWARE LIBRE

José Francisco Villalpando Becerra, Rafael Pantoja Rangel
francisco.villalpando@academicos.udg.mx, rpantoja@prodigy.net.mx
CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

Resumen

Los intentos efectuados a los largo de casi 23 siglos para demostrar el V postulado de Euclides desembocaron en la creación, en el siglo XIX, de unas nuevas geometría a las que se les conoce genéricamente con el nombre de geometrías no euclidianas. El presente trabajo tiene como objetivo mostrar alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría no euclidiana por medio de software libre, el cual permita simular construcciones geométricas interactivas con regla y compás, con la finalidad de verificar la naturaleza de diversos teoremas que son válidos en la geometría euclidiana y comprobar si también los son para la geometría no euclidiana, esto debido a que las preguntas que pueden plantearse y los resultados que se pueden obtener en estas geometrías son muy distintos de aquellos que se conciben y obtienen en la geometría euclidiana.

Palabras Clave: Geometrías no Euclidianas, V postulado de Euclides, software libre.

Introducción

Ninguno de los intentos realizados durante 23 siglos para tratar de demostrar el V postulado de Euclides lograron dicho objetivo, puesto que sea abierta o encubiertamente siempre había en estas “pruebas” una suposición escondida que resultaba equivalente al postulado mismo.

La razón, inconscientemente tal vez, por la cual los geómetras trataron durante 23 siglos, de demostrar el V Postulado, era la evidencia física que se tenía sobre la naturaleza euclidiana del espacio. No tenían pues razones para dudar de la consistencia, igual a la ausencia de contradicciones, de la geometría que les daba el modelo del espacio natural.

Bromberg y Moreno (1987) afirman que esta creencia en los axiomas de la geometría euclidiana, del V Postulado en especial, como verdades inalterables, inherentes a la mente humana había de modificarse pues, como lo muestra la historia, ni viejos hábitos de pensamiento ni la autoridad filosófica podía reprimir la convicción de que la inalterable serie de fracasos de la búsqueda de una demostración del V Postulado no era debido a una falta de ingenio sino más bien al hecho de que tal postulado es realmente independiente de los otros. Análogamente, el fracaso en la obtención de una solución por radicales para la ecuación del quinto grado llevó primero a la convicción y luego a la verificación de que tal solución era imposible.

Los matemáticos Janos Bolyai (1802−1860) y Nicolai Lobachevski (1793−1856) construyeron una geometría en la cual no se verifica el postulado de la paralelas. Su trabajo fue desarrollado bajo la convicción de que la nueva geometría era lógicamente consistente.

El trabajo de Bolyai y Lobachevski llevaron a la convicción de que:

1) El postulado no era demostrable.
2) Añadiendo a la geometría neutra el postulado de Lobachevksi, puede desarrollarse una geometría consistente.

Los postulados de Euclides

Los *Elementos* de Euclides conforman una obra monumental. Allí Euclides enunció unos pocos postulados y fue capaz de deducir, gradualmente, partiendo de estos postulados 465 teoremas, que constituían todo el conocimiento geométrico de su tiempo. Los *Elementos* comienzan con 23 definiciones, 5 postulados, 5 axiomas y los 465 teoremas ya mencionados.

A partir de esas 23 definiciones iniciales Euclides enuncia cinco postulados para la geometría plana.

Los primeros cuatro postulados de Euclides son bastante obvios:

I. Dados dos puntos se puede trazar una única recta que pase por ellos (figura 1).

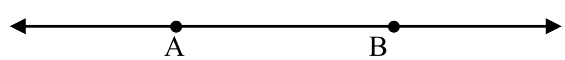


Figura 1. Representación gráfica del Postulado I de Euclides.

II. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta (figura 2).

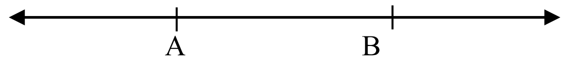


Figura 2. Representación gráfica del Postulado II de Euclides.

III. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera (figura 3).

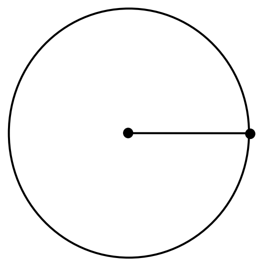


Figura 3. Representación gráfica del Postulado III de Euclides.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales (figura 4).

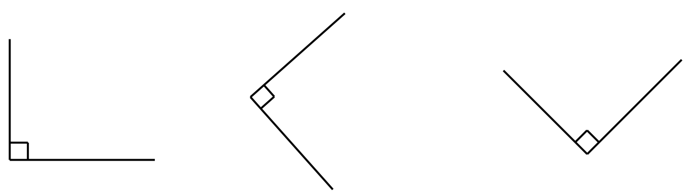


Figura 4. Representación gráfica del Postulado IV de Euclides.

NOTA: Para referirse a que dos segmentos tienen igual longitud o que dos ángulos tienen igual medida angular, Euclides dice que son "iguales".

Los primeros cuatro postulados de Euclides satisfacen el ideal griego de que aquello que se postula debe ser "evidente por sí mismo". Sin embargo, en el V postulado esto cambia de repente:

V. Cuando una recta transversal interseca a dos rectas dadas, si los ángulos interiores de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos (2AR), entonces al prolongarse las dos rectas, ellas se intersecan del lado de estos ángulos. Esto se muestra gráficamente en la figura 5, si $\angle a + \angle b < 2AR$ entonces las rectas l_1 y l_2 se intersecarán del lado de los ángulos *a* y *b*.

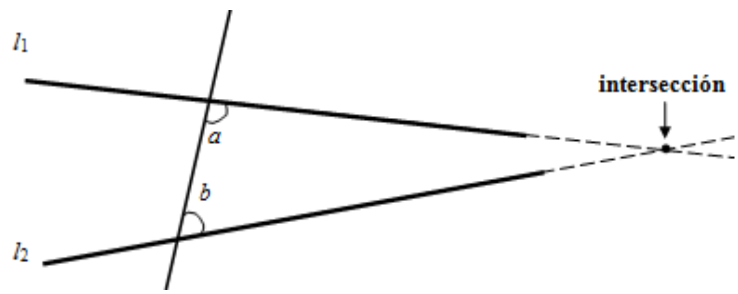


Figura 5. Como $\angle a + \angle b < 2AR$, l_1 y l_2 se intersecarán a la derecha.

Se esperaría que el V Postulado dijera explícitamente algo sobre el comportamiento de las paralelas. Pero no ¿por qué enunció Euclides como V Postulado una definición tan larga, que tiene hipótesis y una conclusión, que no resulta tan evidente como las anteriores?

Según Ramírez y Sierna (2003) el V postulado es distinto, puesto que no se puede verificar experimentalmente si dos rectas consideradas en toda su extensión se cortan ya que sólo se pueden trazar segmentos de las mismas. En ello radica, precisamente, la importancia del V postulado: permite verificar el paralelismo indirectamente, justo en la posición del plano en que estemos trabajando.

Geometrías que se generan a partir del V postulado de Euclides

Se puede decir que existen tres tipos de geometrías que surgen a partir del V postulado:

Si se le acepta se tiene que dada una línea y un punto que no esté en la línea, existe una única línea a través del punto que es paralela a la línea dada. Estamos frente a la geometría euclidiana y frente al plano euclidiano que es de curvatura cero (figura 6), en el cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 2AR.

Figura 6. Plano de curvatura cero: plano euclidiano.

Ramírez y Siena (2003) muestran que existe una formulación lógicamente equivalente al V postulado, conocida como Postulado de Playfair: dada una recta *l* y un punto *P* que no esté sobre la recta *l*, existe *una única* recta *m* que pasa por *P* y que es paralela a *l*, como se muestra en la figura 7. La misma es la que se enseña más comúnmente en las clases de geometría euclidiana.

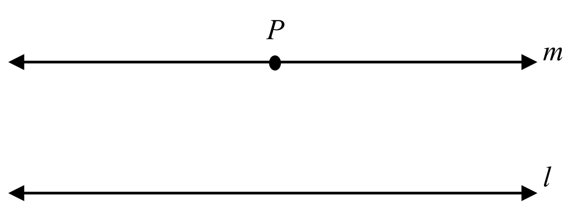


Figura 7. Postulado de Playfair.

Villalpando (2009) afirma que esta nueva versión parece “obvia”, porque estamos acostumbrados a pensar en términos euclidianos. Sin embargo, haciendo énfasis en que los postulados son abstracciones de nuestra experiencia, esto permite apreciar las diferencias entre el V Postulado y los anteriores.

Ahora bien, si se le niega quedan dos opciones:

1) Dada una línea y un punto que no esté en la línea, existen infinitas líneas a través del punto que sean paralelas a la línea dada (figura 8 *i*). Estamos frente a la geometría no euclidiana llamada *hiperbólica* y frente al plano hiperbólico, el cual es de curvatura constante negativa, como es el caso de la seudoesfera (figura 8 *ii*), en el cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 2AR.

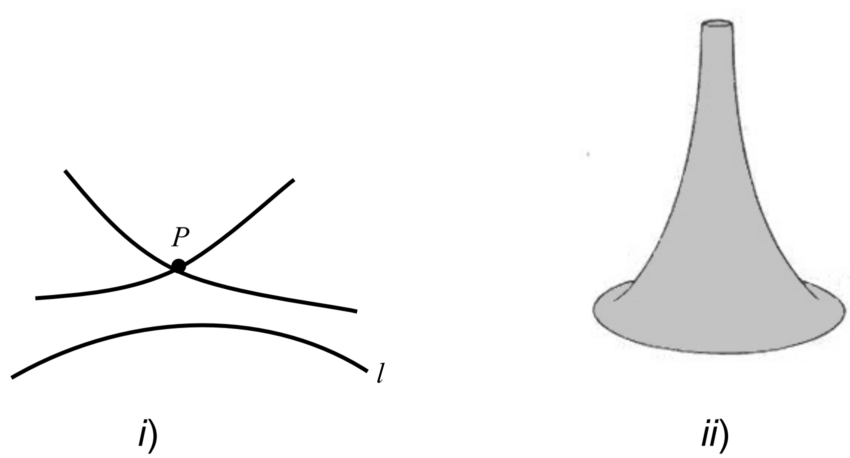


Figura 8. *i*) Infinidad de paralelas. *ii*) Plano de curvatura negativa: la seudoesfera.

En una seudoesfera a medida que el triángulo crece, resulta menor la suma de sus ángulos. El triángulo más pequeño de la seudoesfera es casi un triángulo plano y la suma de sus ángulos se aproxima a la de 2AR (figura 9).

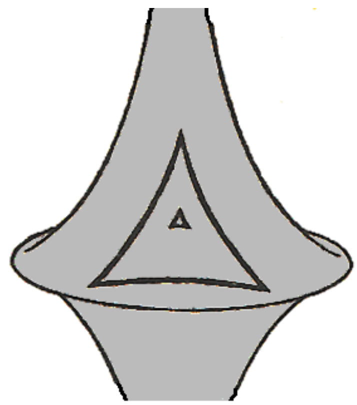
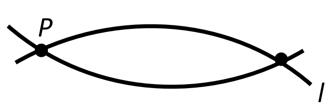
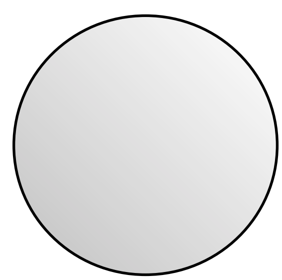


Figura 9. Triángulos en una superficie de curvatura negativa.

2) Dada una línea y un punto que no esté en la línea, no existen líneas a través del punto que sean paralelas a la línea dada (figura 10 *i*). Estamos frente a la geometría no euclidiana llamada *elíptica*, donde sus rectas son cerradas denominadas geodésicas, y frente al plano elíptico el cual es de curvatura constante positiva, como es el caso de la esfera (figura 10 *ii*), y en el cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 2AR.



i)



ii)

Figura 10. *i*) No existen paralelas. *ii*) Plano de curvatura positiva: la esfera.

En la figura 11 el triángulo A es pequeño comparado con la esfera, por lo tanto, casi es un triángulo plano y la suma de sus ángulos es aproximadamente a 2AR. Pero a medida que crece y llega a convertirse en el triángulo B, cuyos lados pertenecen a tres círculos máximos perpendiculares entre sí, vemos que la suma de sus ángulos llega a ser 90º + 90º + 90º = 270º. En el triángulo C, mayor aún que el anterior, los ángulos, que todos son obtusos, dan una suma mayor que 270º.

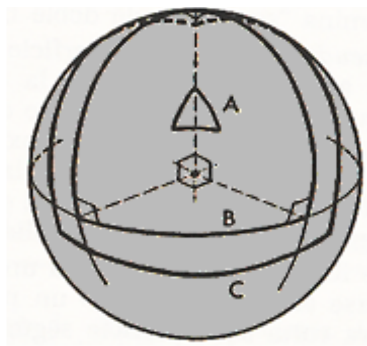


Figura 11. Triángulos en una superficie de curvatura positiva.

Las geometrías no euclidianas *hiperbólica* y *elíptica* se denominan geometrías no euclidianas clásicas. Luego del desarrollo de estas geometrías, se han creado otras geometrías no euclidianas. Toda geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la geometría euclidiana también puede llamarse geometría no euclidiana.

En este sentido Riemann originó toda una clase de geometrías no euclidianas, que han recibido un estudio detallado en la actualidad, y se conocen, con todo derecho, como geometrías *riemannianas*.

Marco Teórico

Alemán de Sánchez (2002) señala la importancia de la simulación en el proceso del aprendizaje de las matemáticas en la educación superior destacando que: la simulación de fenómenos naturales con el uso de la computadora la convierten en un elemento importante en educación. Debido a que el software de este tipo apoya el aprendizaje por descubrimiento, en matemática son utilizados con gran frecuencia para propiciar el establecimiento de reglas y demostración de proposiciones y teoremas.

Macias (2007) hace hincapié en que una de las cualidades que posee este tipo de software es el alto grado de motivación que logra en el aprendizaje a través del ensayo y error (orientado por el profesor) que le permite descubrir cosas que posteriormente confirma que son correctas y fueron descubiertas por brillantes matemáticos quizás algunos siglos atrás.

Arratia, Jáñez, Martín y Pérez (2002) muestran la relación entre la matemática y las nuevas tecnologías: los grandes avances en la informática y la comunicación de los últimos años hacen prever una revolución que está sólo en sus inicios. Las nuevas tecnologías se utilizan para comunicarse, como herramienta de trabajo y también como instrumento de ocio. Aparecen en todas las parcelas de la vida actual, desde la investigación científica hasta el mundo de la empresa, pasando por la enseñanza. En esta última, se puede considerar que el uso de estos avances favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y la adquisición de destrezas por parte del alumno, mediante una nueva forma de organizar, distribuir, representar y codificar la realidad.

Finalmente la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989) propone como objetivo al enseñar la geometría: desarrollar la comprensión de un sistema axiomático mediante la investigación y la comparación de geometrías no euclidianas con la euclidiana.

Programas computacionales para geometría no euclidiana

Como las preguntas que pueden plantearse y los resultados que se pueden obtener en las geometrías no euclidianas son muy distintos de aquellos que se conciben y obtienen en la geometría euclidiana, es importante utilizar algún software con el cual se puedan simular diversas situaciones geométricas.

Existe software especializado, tanto comercial como libre, que puede ser utilizado para la simulación de diversas construcciones en las geometrías no euclidianas, sin embargo, el primero tiene un costo muy elevado, por lo cual resulta muy difícil adquirirlo, además de las restricciones propias de uso como lo es copia o modificación. En cambio el segundo no tiene este tipo de restricciones, además Villalpando (2011) menciona que este software tiene las siguientes libertades:

- Ejecutarlo en cualquier sitio, con cualquier propósito y para siempre.
- Estudiarlo y adaptarlo a necesidades propias.

- Redistribuirlo, de modo que se permita colaborar con vecinos y amigos.
- Mejorarlo y publicar las mejoras.

y puede ser utilizado libremente, pues no tiene costos ni límite de usuarios.
Existen programas y applets interativos que han sido desarrollados para explorar las geometrías no euclidianas: Geometric Supposer, Geometry SketchPad, Cabri Geometry, Cinderella en su versión 2.0, non-Euclidean y NonEuclid son algunos de ellos, los primeros tres son comerciales y los últimos caen en la categoría de software libre.

Estos tienen capacidad para graficar, dibujar y medir figuras geométricas euclidianas y no euclidianas. Estas potencialidades permiten que los estudiantes exploren patrones geométricos y teoremas (De Faria, 2004).

En particular NonEuclid (figura 12) es un software libre potente especializado en la geometría no euclidiana, el cual crea un entorno de simulación interactivo para el aprendizaje y la exploración de la geometría no euclidiana hiperbólica, el cual será utilizado para determinar la naturaleza de algunos teoremas de dicha geometría y compararlos con los de la geometría euclidiana.

Con NonEuclid se pueden realizar interactivamente construcciones con regla y compás para los modelos de geometría hiperbólica del disco y del semi plano superior de Pincaré, utilizando para ello el modelo bidimensional de Poincaré de la geometría hiperbólica. El círculo frontera que aparece en la pantalla, en el modelo del disco, contiene el espacio hiperbólico bidimensional infinito del modelo.

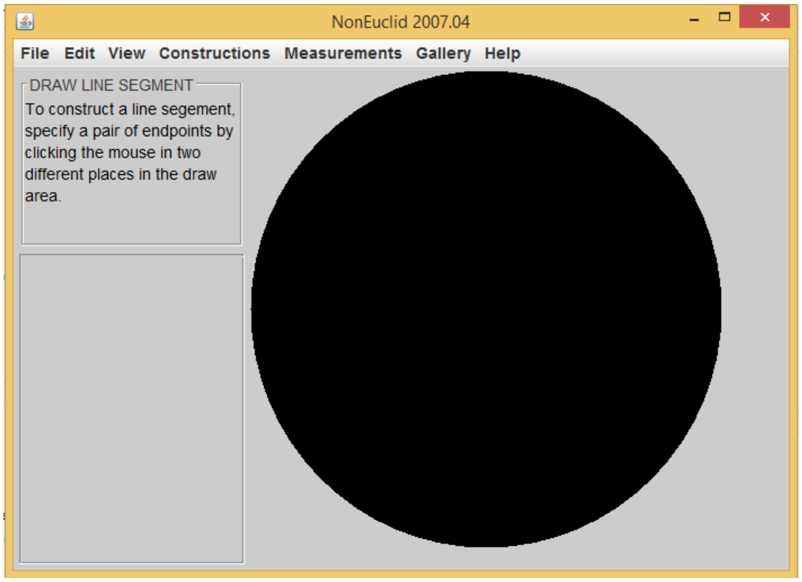


Figura 12. Ventana principal de NonEuclid.

Metodología

Para aprovechar la potencialidad de NonEuclid, se elaboró una serie de actividades, que consisten en un conjunto de afirmaciones que son teoremas, en su mayoría, en la geometría euclidiana, las cuales se tiene que simular su construcción con regla y compás, esto con el objetivo de determinar cuáles son también teoremas en la geometría no euclidiana hiperbólica.

Las actividades diseñadas son aproximadamente 50 y abarcan diversos temas de geometría euclidiana tales como ángulos; triángulos equiláteros, isósceles y rectos; triángulos congruentes, rectángulos y cuadrados, paralelogramos, rombos, polígonos, círculos, entre otros.

Algunos ejemplos sencillos de las mismas son los siguientes teoremas euclidianos:

1) Teorema de Pitágoras, en cualquier triángulo recto, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.
2) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
3) En un triángulo equilátero cada uno de sus ángulos mide 60°.
4) Las tres alturas de un triángulo se intersecan en un punto.
5) ¿Se podrá construir un polígono regular de 12 lados en el plano hiperbólico?
6) Una teselación es una cubierta de un plano geométrico infinito sin huecos o traslapes con figuras congruentes de un tipo o de algunos tipos. ¿Se puede crear una teselación en el plano hiperbólico?

El objetivo de dichas actividades es el de determinar cuáles de estos teoremas son válidos en la geometría hiperbólica. La figura 13 muestra que el Teorema de Pitágoras no es válido en dicha geometría; en cambio en la figura 14 se tiene que, efectivamente, los ángulos de la bases del triángulo isósceles son congruentes, por lo tanto es válido. En la figura 15 se observa un triángulo equilátero, pero sus ángulos no miden 60°, por lo que no es válido en la geometría hiperbólica. En la figura 16 se muestra que las alturas de un triángulo se intersecan en un punto, por lo que es válido.

Finalmente, en las figuras 17 y 18 se observa que es posible construir un polígono regular de 12 lados y una teselación, respectivamente, en la geometría hiperbólica.

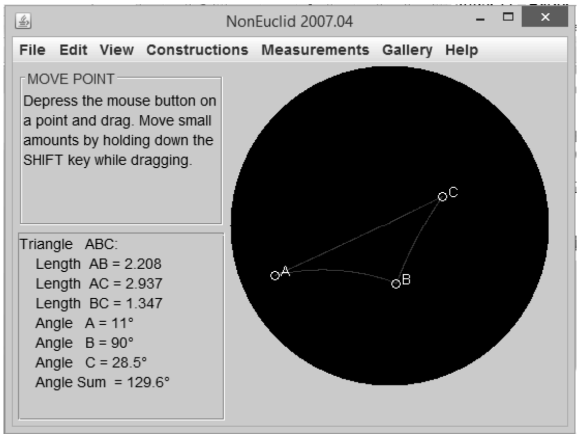


Figura 13. Triángulo rectángulo.

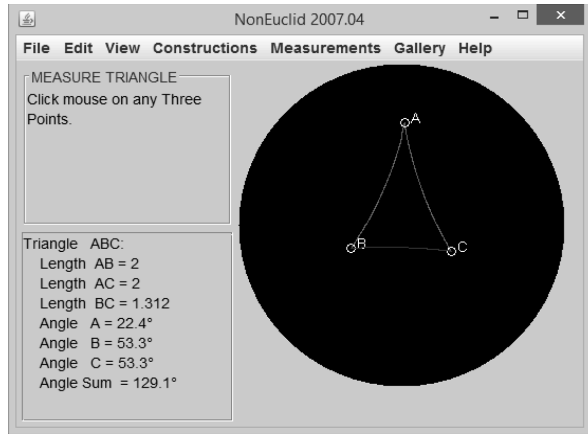


Figura 14. Triángulo isósceles.

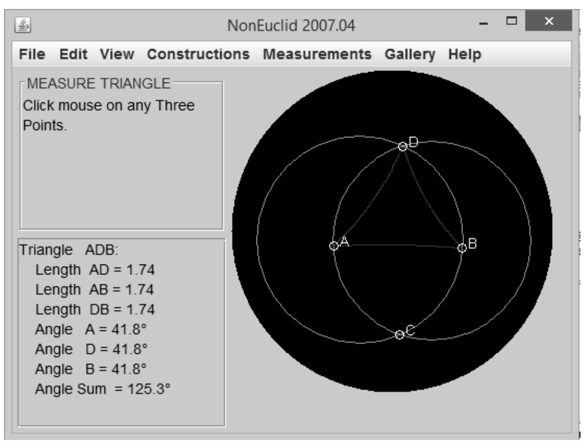


Figura 15. Triángulo equilátero.

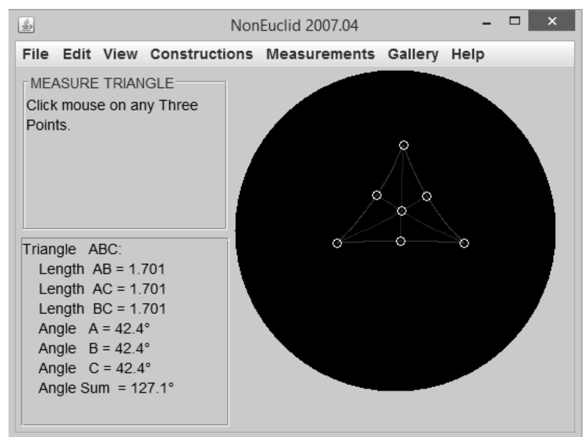


Figura 16. Alturas de un triángulo.

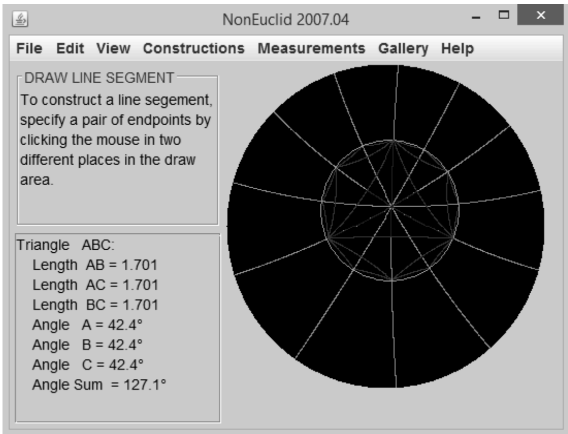


Figura 17. Construcción del dodecágono.

***Figura* 18**. Teselación no euclidiana.

Como se observa, en la geometría hiperbólica algunos teoremas euclidianos son válidos y otros no. ¿A qué se deberá esto?, basta recordar que en la geometría hiperbólica se está trabajando con la negación del V postulado de Euclides y un plano de curvatura constante negativa, por lo que si en la demostración de algún teorema euclidiano se involucra de alguna manera dicho postulado (o una versión lógicamente equivalente del mismo) entonces no va a ser válido en la geometría hiperbólica.

Conclusiones

La utilización de software libre en la geometría no euclidiana resultó ser no solo es una excelente estrategia didáctico-pedagógica sino también económica, pues el ahorro derivado de su utilización posibilitó que los estudiantes tengan las herramientas de software que necesitan, además de no haber problemas con costos por renovaciones de licencias.

El modelo del disco de Poincaré utilizado en el applet NonEuclid, proporciona una interpretación de la geometría hiperbólica dentro de la geometría euclidiana, es decir, la geometría no euclidiana admite una interpretación dentro de la geometría euclidiana. Por lo tanto al ser consiste la geometría euclidiana, la geometría no euclidiana también lo es.

La relación entre la geometría euclidiana y las no euclidianas es que son lógicamente no contradictorias, y por eso están destinadas al fracaso todas las tentativas de demostrar desde un punto de vista lógico que sólo la primera es la única verdadera.

La simulación de construcciones geométricas con regla y compás en NonEuclid ayuda a entender el carácter extraño y no intuitivo de la geometría no euclidiana, además de percibir la diferencia entre definiciones y teoremas usados en geometría.

Finalmente, el estudio de las geometrías no euclidianas comprueba que la geometría no es algo acabado, sino que es un campo de investigación actual y fructífero.

Referencias Bibliográficas

Alemán de Sánchez, A. (2002). *La enseñanza de la matemática asistida por computador*. Recuperado de http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematicas.html

Arratia, O., Jáñez, L., Martín, M. A., & Pérez, M. T. (2002). *Matemáticas y nuevas tecnologías: educación e investigación con manipulación simbólica*. España: Depto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería de la Universidad de Valladolid.

Bromberg, S., & Moreno, S. (1987). *Fundamentos de la geometría, de Euclides a Hilbert* (1ª. ed.). México: CINVESTAV.

De Faria, C. E. (2004, Agosto). *Geometrías no euclidianas con tecnología digital*. Reporte de investigación presentado en el XVIII Simposio Costarricense sobre Matemáticas, Ciencias y Sociedad, San José, Costa Rica.

Macias, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 42*(4).

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. USA: Autor.

Ramírez, G. A., & Sierna, L. G. (2003). *Invitación a las geometrías no euclidianas* (1ª. ed.). México: Facultad de Ciencias de la UNAM.

Villalpando, B. J. (2009). *Notas para el curso de geometría no euclidiana*. Manuscrito no publicado. Universidad de Guadalajara, Guadalajara, México.

Villalpando, B. J. (2011, Abril). *Software libre para la enseñanza de las Matemáticas: en búsqueda de alternativas*. Reporte de investigación presentado en el VIII Seminario Nacional: Enseñanza de las Matemáticas con las Tecnologías de la Información y la Comunicación, Ciudad Guzmán, Jalisco, México.